ΜΑΘΗΜΑ 8Α
2.3 Ανισότητες
Ασκήσεις Ανισοτήτων

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Αν $z = 4 - 3i$ και $|w| \le 1$, να αποδείξετε ότι $|z\bar{w} - iw^2| \le 6$.

Προτεινόμενη λύση

Τριγωνική ανισότητα

$$|z\bar{w} - iw^2| = |z\bar{w} + (-iw^2)| \le |z\bar{w}| + |-iw^2| =$$

$$= |z|\,|\bar{w}| + |-i|\,|w^2| = \qquad (\text{είναι } |z| = \sqrt{4^2+3^2} = 5)$$

$$= 5\,|w| + 1\,|w|^2 \le 5 .1 + 1 .1 = 6$$

2.

Για το μιγαδικό z, αν ισχύει $z^4 - 4z - 6 = 0$, να αποδείξεις ότι $|z| > 1$

Προτεινόμενη λύση

Τριγωνική ανισότητα
και απαγωγή σε άτοπο

Πάμε με την απαγωγή σε άτοπο.

Έστω ότι είναι $|z| \le 1$. Τότε είναι και $|z|^4 \le 1$ **(1)**

Η υπόθεση $\Rightarrow$ $z^4 = 4z + 6$ $\Rightarrow$ $|z^4| = |4z + 6|$ **(2)**

Από την τριγωνική ανισότητα, είναι $|4z + 6| \ge \big||4z| - |6|\big| \overset{(2)}{\Rightarrow}$

$$|z^4| \ge \big||4z| - 6\big| \quad \textbf{(3)}$$

Αλλά $\big||4z| - 6\big| \ge -(\,|4z| - 6) = -\,|4z| + 6$

Η (3) με τη μεταβατική ιδιότητα $\Rightarrow$ $|z^4| \ge -\,|4z| + 6$ **(4)**

Έχουμε $1 \overset{(1)}{\ge} |z|^4 \overset{(4)}{\ge} -\,|4z| + 6$ άρα $1 \ge -\,|4z| + 6$

$$|4z| \ge 5$$

$$4|z| \ge 5$$

$$|z| \ge \frac{5}{4} > 1 \text{ που είναι άτοπο, αφού } |z| \le 1$$

3.

Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|z-i| \le 1$ και $|z-3i| = 2$, να αποδείξετε ότι

$$1 \le |z| \le \sqrt{\frac{5}{2}}$$

Προτεινόμενη λύση

$$|z-i| \le 1 \;\Rightarrow\; |z-i|^2 \le 1$$
$$(z-i)(\bar{z}+i) \le 1$$
$$z\bar{z} + zi - i\bar{z} + 1 \le 1$$
$$|z|^2 + i(z-\bar{z}) \le 0 \quad \textbf{(1)}$$

Εξαντλούμε τις υποθέσεις

$$|z-3i| = 2 \;\Rightarrow\; |z-3i|^2 = 4$$
$$(z-3i)(\bar{z}+3i) = 4$$
$$z\bar{z} + 3zi - 3i\bar{z} + 9 = 4$$
$$|z|^2 + 3i(z-\bar{z}) = -5$$
$$3i(z-\bar{z}) = -5 - |z|^2$$
$$i(z-\bar{z}) = \frac{-5-|z|^2}{3} \quad \textbf{(2)}$$

$$(1) \overset{(2)}{\Rightarrow} |z|^2 + \frac{-5-|z|^2}{3} \le 0 \;\Rightarrow\; 3|z|^2 - 5 - |z|^2 \le 0$$
$$2|z|^2 \le 5$$
$$|z| \le \sqrt{\frac{5}{2}}$$

Τριγωνική ανισότητα $\big||z| - |3i|\big| \le |z-3i| \le |z| + |3i|$

$$\big||z|-3\big| \le 2 \le |z|+3$$
$$\big||z|-3\big| \le 2 \quad \text{(ιδιότητα απολύτων τιμών στους πραγματικούς)}$$
$$-2 \le |z|-3 \le 2$$
$$-2+3 \le |z| \le 2+3$$
$$1 \le |z| \le 5$$
$$1 \le |z|$$

4.

Αν για το μιγαδικό z ισχύει $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > \frac{1}{2}$, να αποδείξετε ότι $|z-1| < 1$

Προτεινόμενη λύση

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > 1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} > 1 \;\Rightarrow\; \frac{\bar{z}+z}{z\bar{z}} > 1$$
$$\bar{z} + z > |z|^2 \quad \textbf{(1)}$$

$$|z-1| < 1 \;\Leftrightarrow\; |z-1|^2 < 1 \;\Leftrightarrow\; (z-1)(\bar{z}-1) < 1 \;\Leftrightarrow\; z\bar{z} - z - \bar{z} + 1 < 1 \;\Leftrightarrow$$
$$|z|^2 - z - \bar{z} < 0 \;\Leftrightarrow\; |z|^2 < z + \bar{z} \quad \text{που ισχύει από την (1)}$$

5.

Για τους $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ δίνεται ότι $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Να αποδείξετε ότι

$$\left(z_1 + z_2 + z_3\right)\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) \le 9$$

Προτεινόμενη λύση

$|z_1| = 1 \quad \Rightarrow \quad \overline{z}_1 = \dfrac{1}{z_1}$. Ομοίως για τους z_2, z_3

$$\begin{aligned}
\left(z_1 + z_2 + z_3\right)\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) &= \left(z_1 + z_2 + z_3\right)\left(\overline{z}_1 + \overline{z}_2 + \overline{z}_3\right) \\
&= \left(z_1 + z_2 + z_3\right)\left(\overline{z_1 + z_2 + z_3}\right) \\
&= |z_1 + z_2 + z_3|^2 \\
&= \left(|z_1 + z_2 + z_3|\right)^2 \overset{*}{\le} \left(|z_1| + |z_2| + |z_3|\right)^2 \\
&\qquad = (1 + 1 + 1)^2 = 3^2 = 9
\end{aligned}$$

* Από την τριγωνική ανισότητα είναι

$$|z_1 + z_2 + z_3| \le |z_1 + z_2| + |z_3| \le |z_1| + |z_2| + |z_3|$$

6.

Για τους μιγαδικούς z_1, z_2 δίνεται ότι $\left|\dfrac{z_1 - i}{z_1 + i}\right| + \left|\dfrac{z_2 - i}{z_2 + i}\right| < 1$. Να αποδείξετε ότι

i) Οι z_1, z_2 δεν είναι πραγματικοί

ii) $\left|\dfrac{z_1 + z_2 - i}{z_1 + z_2 + i}\right| < 1$

Προτεινόμενη λύση

i)

Η σε άτοπο απαγωγή

Έστω ότι είναι πραγματικός ο z_1.

Τότε οι $z_1 - i$, $z_1 + i$ είναι συζυγείς, άρα έχουν ίσα μέτρα.

Οπότε $\left|\dfrac{z_1 - i}{z_1 + i}\right| = \dfrac{|z_1 - i|}{|z_1 + i|} = 1$ που είναι άτοπο από την υπόθεση.

ii)

Από την υπόθεση $\Rightarrow$ $\left|\dfrac{z_1 - i}{z_1 + i}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{|z_1 - i|}{|z_1 + i|} < 1$ **(1)**

Εξαντλούμε την υπόθεση

$$\begin{aligned}
&|z_1 - i| < |z_1 + i| \\
&|z_1 - i|^2 < |z_1 + i|^2 \\
&(z_1 - i)(\overline{z}_1 + i) < (z_1 + i)(\overline{z}_1 - i) \\
&z_1\overline{z}_1 + z_1 i - i\overline{z}_1 + 1 < z_1\overline{z}_1 - z_1 i + i\overline{z}_1 + 1 \\
&2z_1 i - 2i\overline{z}_1 < 0 \\
&2i(z_1 - \overline{z}_1) < 0 \\
&2i\,2i\,\mathrm{Im}(z_1) < 0
\end{aligned}$$

$$-4\,\mathrm{Im}(z_1)<0$$

$$\mathrm{Im}(z_1)>0 \quad \textbf{(2)}$$

Ομοίως $\mathrm{Im}(z_2)>0$

Οπότε $\mathrm{Im}(z_1+z_2)=\mathrm{Im}(z_1)+\mathrm{Im}(z_2)>0+0=0$

Με την αντίστροφη πορεία των παραπάνω ισοδυναμιών και έχοντας $\mathrm{Im}(z_1+z_2)>0$ δηλαδή τη σχέση (2) για το μιγαδικό z_1+z_2,

αποδεικνύουμε την (1) δηλαδή ότι $\left|\dfrac{z_1+z_2-i}{z_1+z_2+i}\right|<1$

7.

Αν $z\in\mathbb{C}$ και $z_1=5-3i,\ z_2=2+i$, να αποδείξετε ότι $5\le|z-z_1|+|z-z_2|$.

Προτεινόμενη λύση

Τριγωνική ανισότητα

Τριγωνική ανισότητα $|(z-z_1)-(z-z_2)|\le|z-z_1|+|z-z_2| \Rightarrow$

$$|z-z_1-z+z_2|\le|z-z_1|+|z-z_2|$$

$$|z_2-z_1|\le|z-z_1|+|z-z_2| \quad \textbf{(1)}$$

Αλλά $|z_1-z_2|=|5-3i-(2+i)|=|5-3i-2-i|=|3-4i|=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

(1) $\Rightarrow$ $5\le|z-z_1|+|z-z_2|$.

8.

Αν $z_1,z_2\in\mathbb{C}^*$, να δείξετε ότι $\left|\left(\dfrac{z_1}{|z_1|}+\dfrac{z_2}{|z_2|}\right)(z_1-z_2)\right|\le 2\left(|z_1|+|z_2|\right)$.

Προτεινόμενη λύση

Τριγωνική ανισότητα δύο φορές

$$\left|\left(\frac{z_1}{|z_1|}+\frac{z_2}{|z_2|}\right)(z_1-z_2)\right|=\left|\frac{z_1}{|z_1|}+\frac{z_2}{|z_2|}\right|\,|z_1-z_2|$$

$$\overset{*}{\le}\left(\left|\frac{z_1}{|z_1|}\right|+\left|\frac{z_2}{|z_2|}\right|\right)\left(|z_1|+|z_2|\right)$$

$$=\left(\frac{|z_1|}{|z_1|}+\frac{|z_2|}{|z_2|}\right)\left(|z_1|+|z_2|\right)$$

$$=(1+1)\left(|z_1|+|z_2|\right)=2\left(|z_1|+|z_2|\right)$$

9.

Για μιγαδικούς z_1, z_2 να αποδείξετε ότι

α) $z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1 z_2 \le |z_1^2|+|z_2^2|$

β) Αν $\alpha>0$ τότε $(1+\alpha)|z_1|^2+\left(1+\dfrac{1}{\alpha}\right)|z_2|^2 \ge |z_1+z_2|^2$

Προτεινόμενη λύση

α)

Αρκεί να δειχτεί ότι $z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1 z_2 \le |z_1|^2+|z_2|^2 \Leftrightarrow z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1 z_2 \le z_1\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2$

Λειτουργούμε με τα $z\overline{z}$ και όχι με τα $|z|^2$

$0\le z_1\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2-z_1\overline{z}_2-\overline{z}_1 z_2$

$0\le z_1(\overline{z}_1-\overline{z}_2)-z_2(\overline{z}_1-\overline{z}_2)$

$0\le(\overline{z}_1-\overline{z}_2)(z_1-z_2)$

$0\le|z_1-z_2|^2$ που ισχύει

β)

Αρκεί να δειχτεί ότι $|z_1|^2+\alpha|z_1|^2+|z_2|^2+\dfrac{1}{\alpha}|z_2|^2 \ge (z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2)$

$$z_1\overline{z}_1+\alpha z_1\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2+\frac{1}{\alpha}z_2\overline{z}_2 \ge z_1\overline{z}_1+z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2$$

$$\alpha z_1\overline{z}_1+\frac{1}{\alpha}z_2\overline{z}_2 \ge z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1$$

$$\alpha^2 z_1\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2 \ge \alpha z_1\overline{z}_2+\alpha z_2\overline{z}_1$$

$$\alpha^2 z_1\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2-\alpha z_1\overline{z}_2-\alpha z_2\overline{z}_1 \ge 0$$

$$\alpha z_1(\alpha\overline{z}_1-\overline{z}_2)-z_2(\alpha\overline{z}_1-\overline{z}_2) \ge 0$$

$$(\overline{\alpha z_1}-\overline{z}_2)(\alpha z_1-z_2) \ge 0$$

$|\alpha z_1-z_2|^2 \ge 0$ που ισχύει

10.

Αν για τον $z\in\mathbb{C}^*$ ισχύει $\left|z^2+\dfrac{1}{z^2}\right|\le 2$, να αποδείξετε ότι $\left|z+\dfrac{1}{z}\right|\le 2$.

Προτεινόμενη λύση

Η υπόθεση γίνεται $\left|\dfrac{z^4+1}{z^2}\right|\le 2 \Leftrightarrow \dfrac{|z^4+1|}{|z^2|}\le 2 \Leftrightarrow |z^4+1|\le 2|z|^2$ **(1)**

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\left|\dfrac{z^2+1}{z}\right|\le 2 \Leftrightarrow \dfrac{|z^2+1|}{|z|}\le 2 \Leftrightarrow$

Πράξεις και τρ. ανισότητα

$|z^2+1|\le 2|z|$

$|z^2+1|^2\le 4|z|^2$

$|(z^2+1)^2|\le 4|z|^2$

$|z^4+2z^2+1|\le 4|z|^2$

Είναι $\left|z^4+2z^2+1\right| = \left|(z^4+1)+2z^2\right| \le \left|z^4+1\right| + \left|2z^2\right| \overset{(1)}{\le} 2|z|^2 + \left|2z^2\right| =$

$$= 2\left|z^2\right| + 2|z|^2 =$$

$$= 4|z|^2$$

11.

Για τους $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4 \in \mathbb{C}$ να αποδείξετε ότι

$|z_1-z_3||z_2-z_4| \le |z_1-z_2||z_3-z_4| + |z_2-z_3||z_4-z_1|$

Προτεινόμενη λύση

$$|z_1-z_2||z_3-z_4| + |z_2-z_3||z_4-z_1| =$$

$$= \left|(z_1-z_2)(z_3-z_4)\right| + \left|(z_2-z_3)(z_4-z_1)\right| \overset{*}{\ge} \qquad * \ |z|+|w| \ge |z-w|$$

$$\left|(z_1-z_2)(z_3-z_4)-(z_2-z_3)(z_4-z_1)\right| =$$

$$= \left|z_1 z_3 - z_1 z_4 - z_2 z_3 + z_2 z_4 - z_2 z_4 + z_2 z_1 + z_3 z_4 - z_3 z_1\right| =$$

$$= \left|-\underline{z_1z_4} - \underline{\underline{z_2z_3}} + \underline{z_2z_1} + \underline{\underline{z_3z_4}}\right| =$$

$$= \left|z_1(z_2-z_4) - z_3(z_2-z_4)\right| =$$

$$= \left|(z_2-z_4)(z_1-z_3)\right| =$$

$$= \left|z_2-z_4\right|\left|z_1-z_3\right|$$

12.

i) Για τους $z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{C}$ να αποδείξετε ότι $|z_1+z_2+z_3| \ge |z_1|-|z_2|-|z_3|$

ii) Αν για τους $z, w \in \mathbb{C}$ ισχύει $|z-i|=1$ και $|w-5|=2$, να αποδείξετε ότι

$\sqrt{26}-3 \le |z-w| \le \sqrt{26}+3$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$|z_1+z_2+z_3| = \left|z_1+(z_2+z_3)\right| \overset{*}{\ge} \qquad * \ |z+w| \ge \big||z|-|w|\big|$$

$$\big||z_1|-|z_2+z_3|\big| \overset{**}{\ge} \qquad ** \ |\alpha| \ge \alpha \text{ στους πραγματικούς}$$

$$|z_1|-|z_2+z_3| \quad \textbf{(1)}$$

Αλλά $|z_2+z_3| \le |z_2|+|z_3| \Rightarrow -|z_2|-|z_3| \le -|z_2+z_3|$ προσθέτω το $|z_1|$

$$|z_1|-|z_2|-|z_3| \le |z_1|-|z_2+z_3| \quad \textbf{(2)}$$

Η (1) γίνεται $|z_1+z_2+z_3| \ge |z_1|-|z_2+z_3| \overset{(2)}{\ge} |z_1|-|z_2|-|z_3|$

ii)

$|z-w| = |z-w-i+i-5+5| =$ Δημιουργούμε τους $z-i$, $w-5$

$$= \left|(z-i)+(-w+5)+(-5+i)\right| =$$

$$= \left|(-5+i)+(z-i)+(-w+5)\right| \overset{(i)}{\ge}$$

$$\left|(-5+i)\right| - \left|(z-i)\right| - \left|(-w+5)\right| =$$

$$= \sqrt{26} - 1 - 2 =$$
$$= \sqrt{26} - 3$$

$$|z - w| = |z - w - i + i - 5 + 5| =$$
$$= |(z - i) + (-w + 5) + (-5 + i)| \leq \quad \text{τρ. ανισότητα σε τρεις προσθετέους}$$
$$|z - i| + |-w + 5| + |-5 + i| =$$
$$= 1 + 2 + \sqrt{26}$$
$$= 3 + \sqrt{26}$$

13.

Για τους $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ να αποδείξετε ότι

$$|(1 - z_1)(1 - z_2)(1 - z_3)| \geq 1 - |z_1| - |z_2| - |z_3|$$

Προτεινόμενη λύση

Όταν ένα τουλάχιστον από τα $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_3|$ είναι ≥ 1, ας είναι $|z_1| \geq 1$, τότε $1 - |z_1| \leq 0$, οπότε το 2ο μέλος της αποδεικτέας ανίσωσης είναι ≤ 0.
Αλλά το 1ο μέλος της αποδεικτέας ανίσωσης είναι ≥ 0.
Άρα η αποδεικτέα ισχύει.

Όταν καθένα από τα $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_3|$ είναι < 1

Είναι $|(1 - z_1)(1 - z_2)(1 - z_3)| =$

$$= |1 - z_1|\,|1 - z_2|\,|1 - z_3| \geq \quad \text{(τριγωνική τρεις φορές)}$$
$$= \big|1 - |z_1|\big|\,\big|1 - |z_2|\big|\,\big|1 - |z_3|\big| = \quad (|z_1| < 1 \Rightarrow 1 - |z_1| > 0)$$
$$= (1 - |z_1|)(1 - |z_2|)(1 - |z_3|) = \quad \text{(πράξεις)}$$
$$= 1 - |z_2| - |z_1| + |z_1||z_2| - |z_3| + |z_2||z_3| + |z_1||z_3| - |z_1||z_2||z_3| =$$
$$= (1 - |z_1| - |z_2| - |z_3|) + (|z_1||z_2| + |z_2||z_3| + |z_1||z_3| - |z_1||z_2||z_3|)$$

Αρκεί να αποδειχθεί ότι $|z_1||z_2| + |z_2||z_3| + |z_1||z_3| - |z_1||z_2||z_3| \geq 0$

$$|z_1||z_2| + |z_2||z_3| + |z_1||z_3| \geq |z_1||z_2||z_3|$$
$$|z_1||z_2| + |z_2||z_3| + |z_1||z_3| - |z_1||z_2||z_3| \geq 0$$
$$|z_1||z_2|(1 - |z_3|) + |z_2||z_3| + |z_1||z_3| \geq 0$$

Που ισχύει , αφού το πρώτο μέλος είναι άθροισμα μη αρνητικών

14.

Να βρεθούν οι μιγαδικοί z, για τους οποίους ισχύει $z^2 - z - 2 < 0$

Προτεινόμενη λύση

Αν δεν έχουμε κάτι άλλο, χρησιμοποιούμε συντεταγμένες

Έστω $z = x + yi$

$$z^2 - z - 2 < 0 \iff$$
$$(x + yi)^2 - (x + yi) - 2 < 0$$
$$x^2 + 2xyi - y^2 - x - yi - 2 < 0$$
$$2xy - y = 0 \quad \text{και} \quad x^2 - y^2 - x - 2 < 0$$
$$y(2x - 1) = 0 \quad \text{και} \quad x^2 - y^2 - x - 2 < 0$$
$$(y = 0 \quad \text{ή} \quad 2x - 1 = 0) \quad \text{και} \quad x^2 - y^2 - x - 2 < 0$$
$$(y = 0 \quad \text{και} \quad x^2 - y^2 - x - 2 < 0) \quad \text{ή} \quad (2x - 1 = 0 \quad \text{και} \quad x^2 - y^2 - x - 2 < 0)$$

- $y = 0 \quad \text{και} \quad x^2 - y^2 - x - 2 < 0 \iff$

  $y = 0 \quad \text{και} \quad x^2 - x - 2 < 0 \iff$ (ρίζες του τριωνύμου $\frac{1 \pm 3}{2} = -1$ ή 2)

  $y = 0 \quad \text{και} \quad -1 < x < 2$

  Άρα $z = x$, όπου $-1 < x < 2$

- $2x - 1 = 0 \quad \text{και} \quad x^2 - y^2 - x - 2 < 0 \iff$

  $x = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 - y^2 - \frac{1}{2} - 2 < 0 \iff$

  $x = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \frac{1}{4} - y^2 - \frac{1}{2} - 2 < 0 \iff$

  $x = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad 1 - 4y^2 - 2 - 8 < 0 \iff$

  $x = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad -4y^2 < 9$ ισχύει για κάθε $y \in \mathbb{R}$

  Άρα $z = \frac{1}{2} + yi$, $y \in \mathbb{R}$

15.

Στο σύνολο $\mathbb{C}$, να λύσετε την ανίσωση $z^2 - 4z + 3 < 0$

Υπόδειξη

Ακολούθησε την άσκηση 14

16.

Για τις εικόνες των $z, w \in \mathbb{C}$ δίνεται ότι ανήκουν στο εσωτερικό του κυκλικού δίσκου που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 4. Να αποδείξετε ότι $4|z-w| < |\bar{z}w - 16|$

Προτεινόμενη λύση

Δίνεται $|z| < 4$ και $|w| < 4$ $\Rightarrow$ $|z|^2 < 16$ και $|w|^2 < 16$ **(1)**

Αρκεί να δειχθεί $4|z-w| < |\bar{z}w - 16|$

$$16\,|z-w|^2 < |\bar{z}w - 16|^2$$
$$16(z-w)(\bar{z}-\bar{w}) < (\bar{z}w - 16)(z\bar{w} - 16)$$
$$16z\bar{z} - 16z\bar{w} - 16w\bar{z} + 16w\bar{w} < \bar{z}wz\bar{w} - \bar{z}w.\,16 - 16\,z\bar{w} + 16\,.16$$
$$16|z|^2 + 16|w|^2 - |z|^2\,|w|^2 - 16\,.16 < 0$$
$$|z|^2(16 - |w|^2) - 16(16 - |w|^2) < 0$$
$$(16 - |w|^2)(|z|^2 - 16) < 0 \quad \text{που ισχύει από τις (1)}$$

17.

Για το μιγαδικό z δίνεται ότι $|z-i| = 1$. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z+1|$.

Προτεινόμενη λύση

Εκφράζουμε τον ζητούμενο $z+1$ συναρτήσει του δοσμένου $z-i$

Είναι $z + 1 = z + 1 - i + i = (z-i) + (1+i)$ **(1)**

Η τριγωνική ανισότητα στον $(z-i) + (1+i)$ $\Rightarrow$

$$\big||z-i| - |1+i|\big| \le |(z-i) + (1+i)| \le |z-i| + |1+i| \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\big||z-i| - |1+i|\big| \le |z+1| \le |z-i| + |1+i| \qquad \textbf{(2)}$$

Είναι όμως $|z-i| = 1$ και $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$$(2) \Rightarrow \big|1 - \sqrt{2}\big| \le |z+1| \le \big|1 + \sqrt{2}\big| \Rightarrow$$
$$\sqrt{2} - 1 \le |z+1| \le \sqrt{2} + 1$$

Επομένως, η μέγιστη τιμή του $|z+1|$ είναι $\sqrt{2}+1$ και η ελάχιστη $\sqrt{2}-1$.

* Αν θέλουμε να βρούμε τον z για τον οποίο συμβαίνει το μέγιστο,

λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} |z-i| = 1 \\ |z+1| = \sqrt{2}+1 \end{cases}$ εισάγοντας συντεταγμένες

Ομοίως για το ελάχιστο.

18.

Για το μιγαδικό z δίνεται ότι $|z-2i+3|=2$. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|w|$ όταν $w=z+2-i$.

Υπόδειξη

$w=z+2-i = z+2-i-2i+2i+3-3 = (z-2i+3)+(-1+i)$

Τριγωνική ανισότητα στον $(z-2i+3)+(-1+i)$

Συνέχισε όπως στην άσκηση 17.

19.

Για το μιγαδικό z δίνεται ότι $|z+3|=1$. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|-1+2i-z|$.

Υπόδειξη

$|-1+2i-z| = |z+1-2i|$

$z+1-2i = z+1-2i+3-3 = (z+3)+(-2-2i)$

Η τριγωνική ανισότητα στον $(z+3)+(-2-2i)$ $\Rightarrow$

Συνέχισε όπως στην άσκηση 17.

20.

Για τους μιγαδικούς α_0, α_1, α_2 δίνεται ότι το μέτρο καθενός είναι ≤ 3 και για μιγαδικό v ισχύει $v^3+\alpha_2 v^2+\alpha_1 v+\alpha_0=0$. Αποδείξτε ότι $|v|<4$.

(Ιούνιος 2013)

Προτεινόμενη λύση

$$v^3+\alpha_2 v^2+\alpha_1 v+\alpha_0=0 \Rightarrow -v^3=\alpha_2 v^2+\alpha_1 v+\alpha_0$$

$$|-v^3|=|\alpha_2 v^2+\alpha_1 v+\alpha_0| \Rightarrow$$

$$|v^3|=|\alpha_2 v^2+\alpha_1 v+\alpha_0| \leq |\alpha_2 v^2|+|\alpha_1 v|+|\alpha_0| =$$

$$=|\alpha_2|\,|v^2|+|\alpha_1|\,|v|+|\alpha_0| \leq$$

$$\leq 3\,|v^2|+3\,|v|+3$$

Αποδείξαμε ότι $|v|^3 \leq 3|v|^2+3|v|+3 \Rightarrow |v|^3-1 \leq 3|v|^2+3|v|+3-1 \Rightarrow$

$$(|v|-1)(|v|^2+|v|+1) \leq 3|v|^2+3|v|+2 \Rightarrow$$

$$|v|-1 \leq \frac{3|v|^2+3|v|+2}{|v|^2+|v|+1} = \frac{3|v|^2+3|v|+3-1}{|v|^2+|v|+1} = \frac{3\left(|v|^2+|v|+1\right)-1}{|v|^2+|v|+1} =$$

$$= 3-\frac{1}{|v|^2+|v|+1} < 3$$

Άρα $|v|-1<3 \Rightarrow |v|<4$